INTEGRACIÓN POR PARTES

Existe una variedad de integrales que se pueden desarrollar, usando la relación: $\int u dv = uv - \int v du$. El problema es elegir u y dv , por lo cual es útil la siguiente identificación:

I: Función trigonométrica inversa.
L: Función logarítmica.
A: Función algebraica.
T: Función trigonométrica.
E: Función exponencial.

Se usa de la manera siguiente:

3.1 **Encontrar**: $\int x\cos x\,dx$

Solución.-*I L A T E*

$$\overbrace{x}^{\downarrow}\ \overbrace{\cos x}^{\downarrow}$$

$$\therefore \begin{cases} u = x & dv = \cos x\,dx \\ du = dx & v = \sin x \end{cases}$$

$$\therefore \int x\cos x\,dx = \overbrace{x}^{u}\overbrace{\sin x}^{v} - \int \overbrace{\sin x}^{v}\,\overbrace{dx}^{du} =$$

$$x\sin x + \cos x + c$$

Respuesta:

$$\int x\cos x\,dx = \boxed{\boldsymbol{x\sin x + \cos x + c}}$$

3.2 **Encontrar**: $\int x\sec^2(3x)\,dx = \int x(\sec(3x))^2\,dx$

Solución.-*I L A T E*

$$\overbrace{x}^{\downarrow}\ \overbrace{\sec^2 x}^{\downarrow}$$

$$\therefore \begin{cases} u = x & dv = \sec^2 3x\,dx \\ du = dx & v = \dfrac{1}{3}\tan 3x \end{cases}$$

$$\therefore \int x(\sec(3x))^2\,dx = \overbrace{x}^{u}\overbrace{\frac{1}{3}\tan 3x}^{v} - \int \overbrace{\frac{1}{3}\tan 3x}^{v}\,\overbrace{dx}^{du}$$

$$= \frac{1}{3}x\tan 3x - \frac{1}{3}\int \tan 3x\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x\tan 3x - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\ln|\sec 3x|\right] + c$$

$$= \frac{1}{3}x\tan 3x - \frac{1}{9}\ln|\sec 3x| + c$$

Respuesta:

$$\int x\sec^2(3x)\,dx = \boxed{\boldsymbol{\frac{1}{3}x\tan 3x - \frac{1}{9}\ln|\sec 3x| + c}}$$

3.3 **Encontrar**: $\int x^2\sin x\,dx$

Solución.-*I L A T E*

$$\overbrace{x^2}^{\downarrow}\ \overbrace{sin\ x}^{\downarrow}$$

$$\therefore \begin{cases} u = x^2 & dv = \sin x\,dx \\ du = 2x\,dx & v = -\cos x \end{cases}$$

$$\therefore \int x^2\sin x\,dx =$$

$$\overbrace{(x^2)}^{u}\overbrace{(-\cos x)}^{v} - \int \overbrace{(-\cos x)}^{v}\,\overbrace{(2x\,dx)}^{du} =$$

$$-x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx$$

, resolviendo nuevamente por partes el segundo segmento.

$$\int x\cos x\,dx;\quad \begin{matrix} u = x & dv = \cos x\,dx \\ du = dx & v = \sin x \end{matrix}$$

$$\int x\cos x\,dx = \overbrace{x}^{u}\overbrace{\sin x}^{v} - \int \overbrace{\sin x}^{v}\,\overbrace{dx}^{du} = x\sin x + \cos x$$

$$\therefore \int x^2\sin x\,dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx$$

$$= -x^2\cos x + 2[x\sin x + \cos x]$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c$$

Respuesta:

$$\int x^2\sin x\,dx = \boxed{\boldsymbol{\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c}}$$

3.4 **Encontrar**: $\int (x^2 + 5x + 6)\cos 2x\,dx$

Solución.-*I L A T E*

$$\overbrace{x^2 + 5x + 6}^{\downarrow}\ \overbrace{\cos 2x}^{\downarrow}$$

$$\therefore \begin{cases} u = x^2 + 5x + 6 & dv = \cos 2x\,dx \\ du = (2x+5)dx & v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$$

$$\therefore \int (x^2+5x+6)\cos 2x\,dx =$$

$$\overbrace{(x^2+5x+6)}^{u}\overbrace{\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)}^{v} - \int \overbrace{\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)}^{v}\overbrace{(2x+5)dx}^{du} =$$

$$\frac{(x^2+5x+6)}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int (2x+5)\sin 2x\,dx$$

Integrando por partes la segunda integral.

$$\begin{matrix} I & L & A & T & E \\ & & \downarrow & \downarrow & \\ & & \overbrace{2x+5} & \overbrace{sin\ 2x} & \end{matrix}$$

$$\therefore \begin{cases} u = 2x+5 & dv = \sin 2x\,dx \\ du = 2dx & v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$$

$$\int (2x+5)\sin 2x\,dx =$$

$$\begin{aligned} &\overbrace{(2x+5)}^{u}\overbrace{\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)}^{v} - \int \overbrace{\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)}^{v}\overbrace{(2)dx}^{du} \\ &= \left(-x-\frac{5}{2}\right)\cos 2x + \frac{2}{2}\int \cos 2x\,dx \\ &= \left(-x-\frac{5}{2}\right)\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x \end{aligned}$$

$$\therefore \int (x^2+5x+6)\cos 2x\,d =$$

$$\frac{(x^2+5x+6)}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\left[\left(-x-\frac{5}{2}\right)\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x\right] =$$

$$\frac{(x^2+5x+6)}{2}\sin 2x + \left(\frac{x}{2}+\frac{5}{4}\right)\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

Respuesta:

$$\int x^2 \sin x\,dx =$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{(x^2+5x+6)}{2}\sin 2x + \left(\frac{x}{2}+\frac{5}{4}\right)\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + c}}$$

Nota.-Ya se habrá dado cuenta el lector, que la elección conveniente para el *u* y el *dv*, dependerá de la ubicación de los términos funcionales en la palabra ILATE. El de la izquierda corresponde al *u*, y el otro será el *dv*.

3.5 **Encontrar**: $\int \ln x\,dx$

Solución.-$\begin{matrix} I & L & A & T & E \\ & \downarrow & \downarrow & & \\ & \overbrace{ln\ x} & \overbrace{1} & & \end{matrix}$

$$\therefore \begin{cases} u = \ln x & dv = 1dx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \ln x\,dx &= \overbrace{(ln\ x)}^{u}\overbrace{(x)}^{v} - \int \overbrace{(x)}^{v}\overbrace{\left(\frac{dx}{x}\right)}^{du} = x\ln x - \int dx \\ &= x\ln x - x + c \end{aligned}$$

Respuesta:

$$\int \ln x\,dx = \boxed{\boldsymbol{x\ln x - x + c}}$$

3.6 **Encontrar**: $\int \ln(a^2+x^2)\,dx$

Solución.-$\begin{matrix} I & L & A & T & E \\ & \downarrow & \downarrow & & \\ & \overbrace{\ln(a^2+x^2)} & \overbrace{1} & & \end{matrix}$

$$\therefore \begin{cases} u = \ln(a^2+x^2) & dv = 1dx \\ du = \dfrac{2x}{a^2+x^2}dx & v = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \ln x\,dx &= \overbrace{(\ln(a^2+x^2))}^{u}\overbrace{(x)}^{v} - \int \overbrace{(x)}^{v}\overbrace{\left(\frac{2x}{a^2+x^2}dx\right)}^{du} \\ &= x\ln(a^2+x^2) - \underline{\int \frac{2x^2}{a^2+x^2}dx} \end{aligned}$$

La expresión que esta subrayada es un cociente de polinomios del mismo orden, tanto en el numerador como en el denominador. Así que debemos dividir entonces obtenemos que:

$$\frac{2x^2}{a^2+x^2} = 2 - \frac{2a^2}{a^2+x^2}$$

expresión que es más fácil de Integrar, pues el primer termino es una constante y el 2º es por formula.

$$Entonces:\ -\underline{\int \frac{2x^2}{a^2+x^2}dx} = -\int\left[2 - \frac{2a^2}{a^2+x^2}\right]dx =$$

$$-2\int dx + 2a^2\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = -2x + 2a^2\left[\frac{\arctan\left(\frac{x}{a}\right)}{a}\right]$$

$$= -2x + 2a\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \ln x\,dx &= x\ln(a^2+x^2) - \underline{\int \frac{2x^2}{a^2+x^2}dx} \\ &= x\ln(a^2+x^2) - 2x + 2a\arctan\left(\frac{x}{a}\right) \end{aligned}$$

Respuesta:

$$\int \ln(a^2+x^2)\,dx =$$

$$\boxed{\boldsymbol{x\ln(a^2+x^2) - 2x + 2a\arctan\left(\frac{x}{a}\right)}}$$

3.7 **Encontrar**: $\int \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)dx$

$$= \int \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|dx$$

Solución.- $I \quad L \quad A \quad T \quad E$

$$\overbrace{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}^{\downarrow}\ \overbrace{1}^{\downarrow}$$

$$\therefore \begin{cases} u=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) & dv=1dx \quad \text{y} \quad v=x \\ du=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}dx=\dfrac{\dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}}{\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{1}}dx=\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}} & \end{cases}$$

$$\therefore \int \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)dx=$$

$$\overbrace{\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)}^{u}\overbrace{(x)}^{v}-\int \overbrace{(x)}^{v}\overbrace{\left(\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}\right)}^{du}=$$

$$x\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\underline{\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx}$$

La integral subrayada se integra por sustitución y se

obtiene que: $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$

$$w=x^2-1 \quad dw=2xdx \to \frac{dw}{2}=xdx$$

Entonces:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx=\frac{1}{2}\int w^{-\frac{1}{2}}dw=\frac{1}{2}\left[2w^{\frac{1}{2}}\right]=(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$$

Luego:

$$\int \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)dx=$$

$$x\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\underline{\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx}=$$

$$x\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\sqrt{x^2-1}+c$$

Respuesta:

$$\int \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|dx=$$

$$\boxed{\boldsymbol{x\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|-\sqrt{x^2-1}+c}}$$

3.8 **Encontrar**: $\int \ln^2 x\,dx=\int (\ln x)^2\,dx$

Solución.-$I \quad L \quad A \quad T \quad E$

$$\overbrace{\ln^2 x}^{\downarrow}\ \overbrace{1}^{\downarrow}$$

$$\therefore \begin{cases} u=\ln^2 x & dv=1dx \\ du=(2\ln x)\left(\dfrac{1}{x}\right)dx & v=x \end{cases}$$

$$\therefore \int \ln^2 x\,dx=\overbrace{(\ln^2 x)}^{u}\overbrace{(x)}^{v}-\int \overbrace{(x)}^{v}\overbrace{\left((2\ln x)\left(\frac{1}{x}\right)dx\right)}^{du}$$

$$=x\ln^2 x-2\int \ln x$$

Por el Ejercicio 3.5, se tiene que:

$$\int \ln x\,dx=\boldsymbol{x\ln x-x+c}$$

Entonces:

$$\int \ln^2 x\,dx=x\ln^2 x-2\int \ln x=$$

$$x\ln^2 x-2x\ln x+2x+c$$

Respuesta:

$$\int \ln^2 x\,dx=\boxed{\boldsymbol{x\ln^2 x-2x\ln x+2x+c}}$$

3.9 **Encontrar**: $\int \arctan x\,dx$

Solución.- $I \quad L \quad A \quad T \quad E$

$$\overbrace{\arctan x}^{\downarrow}\quad \overbrace{1}^{\downarrow}$$

$$\therefore \begin{cases} u=\arctan x & dv=1dx \\ du=\dfrac{dx}{x^2+1} & v=x \end{cases}$$

$$\therefore \int \arctan x\,dx=\overbrace{(\arctan x)}^{u}\overbrace{(x)}^{v}-\int \overbrace{(x)}^{v}\overbrace{\left(\frac{dx}{x^2+1}\right)}^{du}$$

$$=x\arctan x-\underline{\int \frac{x}{x^2+1}dx}$$

La integral subrayada se resuelve por sustitución entonces:

$$w=x^2+1 \quad dw=2xdx \to \frac{dw}{2}=xdx$$

Así: $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{w}dw=\frac{1}{2}\ln w=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

$$\therefore \int \arctan x\,dx=x\arctan x-\underline{\int \frac{x}{x^2+1}dx}$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$$

Respuesta:

$$\int \arctan x\,dx = \boxed{\boldsymbol{x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+c}}$$

3.10 **Encontrar**: $\int x^2\ \arctan x\,dx$

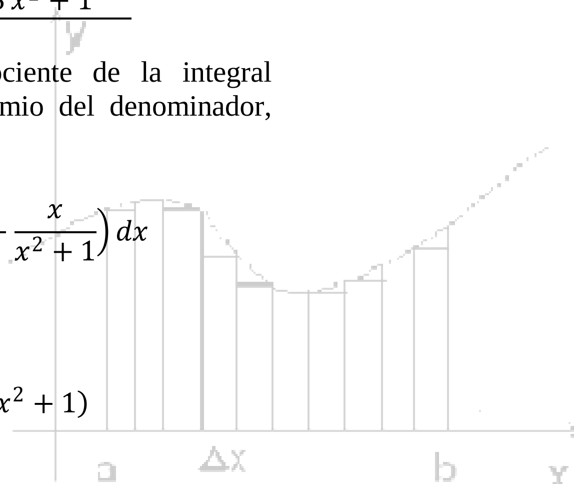
Solución.- $I \quad L \quad A \quad T \quad E$

$$\underbrace{\arctan x}_{\downarrow} \qquad \underbrace{x^2}_{\downarrow}$$

$$\therefore \begin{cases} u = \arctan x & dv = x^2 dx \\ du = \dfrac{dx}{x^2+1} & v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$$

$$\therefore \int x^2 \arctan x\,d = \overbrace{(\arctan x)}^{u}\overbrace{\left(\frac{x^3}{3}\right)}^{v} - \int \overbrace{\left(\frac{x^3}{3}\right)}^{v}\overbrace{\left(\frac{dx}{x^2+1}\right)}^{du}$$

$$= \frac{x^3\arctan x}{3} - \underline{\int \frac{1}{3}\frac{x^3}{x^2+1}\,dx}$$



Puesto que el numerador del cociente de la integral subrayada es mayor que el polinomio del denominador, debemos dividir, así:

$$\int \frac{1}{3}\frac{x^3}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{3}\int\left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

Por el ejercicio 3.9 sabemos que:

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

$$\therefore \int x^2 \arctan x\,dx$$

$$= \frac{x^3\arctan x}{3} - \left\{\frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]\right\}$$

$$= \frac{x^3\arctan x}{3} - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\ln(x^2+1) + c$$

Respuesta:

$$\int x^2 \arctan x\,dx =$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{x^3\arctan x}{3} - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\ln\left(x^2+1\right)+c}}$$