EJERCICIOS DESARROLLADOS DE INTEGRACIÓN POR EL MÉTODO DE **SUSTITUCIÓN.**

2.1 **Encontrar:** $\int \frac{e^{\ln x}}{x^2+7}dx$

Solución.- Como: $e^{\ln x} = x$, se tiene que:

$$\int \frac{e^{\ln x}}{x^2+7}dx = \int \frac{x}{x^2+7}dx$$

Sea la sustitución: $u = x^2+7$ y $du = 2xdx$, pero se debe despejar dx de contantes, así que $\frac{du}{2} = xdx$

Dado que: $\int \frac{x}{x^2+7}dx = \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+7}dx$

Se tiene: $\int \frac{x}{x^2+7}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$, integral que es inmediata.

Luego: $\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln|x^2+7| + c$

Respuesta:

$$\int \frac{e^{\ln x}}{x^2+7}dx = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{\ln|x^2+7|+c}$$

2.2 **Encontrar:** $\int \frac{e^{\ln x^2}}{x^3+8}dx$

Solución.- Como: $e^{\ln x^2} = x^2$, se tiene que: $\int \frac{e^{\ln x}}{x^3+8}dx = \int \frac{x^2}{x^3+8}dx$

Sea la sustitución: $u = x^3+8$ y $du = 3x^2dx$, pero se debe despejar dx de contantes, así que $\frac{du}{3} = x^2dx$

Dado que: $\int \frac{x^2}{x^3+8}dx = \frac{1}{3}\int \frac{x}{x^2+7}dx$

Se tiene: $\int \frac{x}{x^2+7}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$, integral que es inmediata.

Luego: $\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln|x^2+7| + c$

Respuesta

$$\int \frac{e^{\ln x}}{x^2+7}dx = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{\ln|x^2+7|+c}$$

2.3 **Encontrar:** $\int (x+2)\sin(x^2+4x-6)\,dx$

Solución.- Sea la sustitución: $u = x^2+4x-6$ y $du = (2x+4)dx$, se factoriza el 2 y se despeja $\therefore \frac{du}{2} = (x+2)dx$. Dado que: $\int (x+2)\sin(x^2+4x-6)\,dx$, Se sustituye y obtenemos: $\frac{1}{2}\int \sin(u)\,du$, integral que es inmediata.

Se tiene: $\frac{1}{2}\int \sin(u)\,du = -\frac{1}{2}\cos u + c = -\frac{1}{2}\cos(x^2+4x-6) + c$

Respuesta

$$\int (x+2)\sin(x^2+4x-6)\,dx = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{\cos(x^2+4x-6)+c}$$

2.4 **Encontrar:** $\int x\sin(1-x^2)\,dx$

Solución.- Sea la sustitución: $u = 1-x^2$ y $du = -2x\,dx$, pero de debe despejar dx de constantes, se despeja el -2 $\therefore \frac{du}{-2} = x\,dx$. Dado que: $\int x\sin(1-x^2)\,dx$, Se sustituye y obtenemos: $-\frac{1}{2}\int \sin(u)\,du$, integral que es inmediata.

Se tiene:

$$\frac{1}{2}\int \sin(u)\,du = -\frac{1}{2}(-\cos u) + c$$
$$= \frac{1}{2}\cos(1-x^2) + c$$

Respuesta:

$$\int x\sin(1-x^2)\,dx = \frac{1}{2}\cos(1-x^2) + c$$

2.5 **Encontrar:** $\int x\cot(x^2+1)\ dx$

Solución.- Sea la sustitución: $u = 1+x^2$ y $du = 2x\,dx$, pero de debe despejar dx de constantes, se despeja el 2 $\therefore \frac{du}{2} = x\,dx$. Dado que: $\int x\cot(1+x^2)\,dx$, Se sustituye y obtenemos: $\frac{1}{2}\int x\cot(u)\,du$, integral que es inmediata.

Se tiene: $\frac{1}{2}\int x\cot(u)\,du = \frac{1}{2}[\ln|\sin(u)|] + c = \frac{1}{2}\ln|\sin(1+x^2)| + c$

Respuesta:

$$\int x\cot(x^2+1)\ dx = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{\ln|\sin(1+x^2)|+c}$$

2.6 **Encontrar:** $\int y^3\sqrt{1+y^4}\,dy$

Solución.- Sea la sustitución: $u = 1+y^4$ y $du = 4y^3\,dy$, pero de debe despejar dy de constantes, se despeja el 4 $\therefore \frac{du}{4} = y^3\,dx$. Dado que: $\int y^3\sqrt{1+y^4}\,dy$, Se sustituye y obtenemos: $\frac{1}{4}\int u^{\frac{1}{2}}\,du$, integral que es inmediata.

Se tiene: $\frac{1}{4}\int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{4}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right] + c = \frac{1}{4}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] + c = \frac{1}{4}\left[\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}\right] + c = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{6} + c = \frac{2}{6}(1+y^4)^{\frac{3}{2}} + c$

Respuesta:

$$\int y^3\sqrt{1+y^4}\,dy = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{6}}\sqrt{\mathbf{(1+y^4)^3}} + \mathbf{c}$$

2.7 **Encontrar:** $\int \frac{3t}{\sqrt[3]{t^2+3}}dt$

Solución.- Sea la sustitución: $u = t^2+3$ y $du = 2t\,dt$, pero de debe despejar dt de constantes, se despeja el 2 $\therefore \frac{du}{2} = t\,dt$. Dado que $\int \frac{3t}{\sqrt[3]{t^2+3}}dt$:, Se sustituye y obtenemos: $\frac{3}{2}\int \frac{du}{u^{\frac{1}{3}}}$, integral que es inmediata.

Se tiene:

$$\frac{3}{2}\int \frac{du}{u^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{2}\int (u)^{-\frac{1}{3}}\,du = \frac{3}{2}\left[\frac{(u)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\right] + c =$$
$$\frac{3}{2}\left[\frac{(u)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right] + c = \frac{3}{2}\left[\frac{3(u)^{\frac{2}{3}}}{2}\right] + c = \frac{6}{4}(u)^{\frac{2}{3}} + c$$
$$= \frac{6}{4}(t^2+3)^{\frac{2}{3}} + c$$

Respuesta:

$$\int \frac{3t}{\sqrt[3]{t^2+3}}dt = \frac{6}{4}(t^2+3)^{\frac{2}{3}} + c = \frac{6}{4}\sqrt[3]{(t^2+3)^2} + c$$

2.8 **Encontrar:** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{a+bx}} = \int \frac{dx}{(a+bx)^{\frac{1}{3}}}$, donde a y b son constantes.

Solución.- Sea la sustitución: $u = a + bx$ y $du = b\, dt$, pero de debe despejar dx de constantes, se despeja b $\therefore \frac{du}{b} = dx$. Dado que $\int \frac{dx}{(a+bx)^{\frac{1}{3}}}$: Se sustituye y obtenemos: $\frac{1}{b}\int \frac{du}{u^{\frac{1}{3}}}$, integral que es inmediata.

Se tiene:

$$\frac{1}{b}\int \frac{du}{u^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{b}\int (u)^{-\frac{1}{3}} du = \frac{1}{b}\left[\frac{(u)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\right] + c =$$

$$\frac{1}{b}\left[\frac{(u)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right] + c = \frac{1}{b}\left[\frac{3(u)^{\frac{2}{3}}}{2}\right] + c = \frac{3}{2b}(u)^{\frac{2}{3}} + c =$$

$$\frac{3}{2b}(a+bx)^{\frac{2}{3}} + c$$

Respuesta

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{a+bx}}dx = \frac{3}{2b}(a+bx)^{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{2b}\sqrt[3]{(a+bx)^2} + c$$

2.9 **Encontrar:** $\int \sqrt{\frac{\arcsin\ x}{1-x^2}}dx = \int \frac{\sqrt{\arcsin\ x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Solución.- Sea $u = \arcsin x$ y $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Luego:

$$\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c =$$

$$\frac{2}{3}(\arcsin x)^{\frac{3}{2}} + c$$

Respuesta

$$\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx = \frac{2}{3}(\arcsin x)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3} + c$$

2.10 **Encontrar:** $\int \frac{\arctan\frac{x}{2}}{4+x^2}dx$

Solución.- Sea $u = \arctan\frac{x}{2}$ y $du = \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{2}dx = \frac{dx}{2+\frac{x^2}{2}}dx$, se multiplica por 1 y se obtiene: $du = \frac{1}{2+\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{2}{2}dx = \frac{2}{4+x^2}dx$, ahora despejamos ese 2 de mas. $\therefore \frac{du}{2} = \frac{dx}{4+x^2}$

Luego:

$$\int \frac{\arctan\frac{x}{2}}{4+x^2}dx = \frac{1}{2}\int u\, du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^2}{2}\right] + c = \frac{1}{4}u^2 + c =$$

$$\frac{1}{4}\left(\arctan\frac{x}{2}\right)^2 + c$$

Respuesta

$$\int \frac{\arctan\frac{x}{2}}{4+x^2}dx = \frac{1}{4}\left(\arctan\left[\frac{x}{2}\right]\right)^2 + c$$